

5th Geometry and Physics Conference

Dakar, 14-19 May, 2007

Université Cheikh Anta Diop

Résumés des mini-cours

RÉSUMÉS

Anton Alekseev (Université de Genève, Suisse)

LA SERIE DE CAMPBELL-HAUSDORFF ET LA CONJECTURE DE
KASHIWARA-VERGNE

Résumé: à préciser

Augustin Banyaga (Penn State University, USA)

INTRODUCTION À LA GÉOMÉTRIE DES DIFFÉOMORPHISMES HAMILTONIENS

Après un exposé général sur les difféomorphismes symplectiques, hamiltonniens, et l'homomorphisme flux, on énoncera quelques théorèmes fondamentaux (simplicité du groupe des difféomorphismes hamiltonniens (Banyaga), C^0 -rigidité (Gromov-Eliashberg), solution de la conjecture d'Arnold et l'homologie de Floer), la solution de la conjecture du flux (Ono)). Enfin, on introduira la métrique de Hofer sur le groupe des difféomorphismes hamiltonniens. On finira par une liste de quelques problèmes ouverts.

Jean-Paul Dufour (Université Montpellier 2, France)

STRUCTURES DE POISSON ET QUELQUES PROBLÈMES CONCERNANT LEURS
SINGULARITÉS

Les deux premières séances seront consacrées aux notions et résultats de base concernant les structures de Poisson. La dernière présentera quelques problèmes ouverts relatifs aux singularités de structures de Poisson. Voici le plan détaillé du mini-cours:

Première séance :

- Définitions des structures de Poisson et des tenseurs de Poisson.
- Exemples des structures symplectiques et des duaux d'algèbres de Lie.
- Champs hamiltonniens et morphismes de Poisson.
- Feuilletage symplectique.

Deuxième séance :

- Coordonnées canoniques de Darboux-Weinstein.
- Structure de Poisson transverse à une feuille symplectique.
- Crochet de Schouten.
- Rotationnel d'un tenseur de Poisson.
- Cohomologie de Poisson. Utilisation de la cohomologie pour l'étude des singularités.

Troisième séance :

- Ce que l'on sait concernant la linéarisation des structures de Poisson au voisinage d'un point singulier.
 - Structures de Poisson quadratiques et les résultats de quadratisation.
 - Problème ouvert de la quadratisation des structures transverses aux orbites co-adjointes.
 - Singularités stables et le théorème de Crainic-Fernandes; problème ouvert concernant la stabilité locale de structures de Poisson décomposables.
-

Tudor Ratiu (Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Suisse)

THÉORÈME DE TRANCHE EN DIMENSIONS INFINIES ET HYDRODYNAMIQUE
AVEC SYMÉTRIE CIRCULAIRE

On présente la définition générale et les propriétés élémentaires des variétés, des applications et des groupes des difféomorphismes de class H^s . Ensuite, on discute les propriétés géométriques des équations d'Euler pour un fluide idéal incompressible et homogène. On présente un théorème de tranche pour une action d'un groupe de Lie en dimension finie sur une variété d'applications et on l'applique au mouvement d'un fluide avec symétrie circulaire.

Reyer Sjamaar (Cornell University, USA)

SUR LA GÉOMÉTRIE SYMPLECTIQUE RÉELLE

Une variété symplectique *réelle* est une variété symplectique munie d'une involution anti-symplectique. Son lieu réel, c'est-à-dire l'ensemble des points fixes, est une variété lagrangienne lisse. Cette notion doit son nom au cas particulier des variétés projectives complexes dites réelles. Il est légèrement moins évident que beaucoup d'objets quaternioniques, comme les variétés de drapeaux quaternioniques, sont des lieux réels de variétés symplectiques.

Une méthode efficace pour mieux comprendre une variété réelle est d'étudier la relation avec sa complexification. Cette idée s'avère être fructueuse dans la catégorie symplectique également. Si G est un groupe de Lie, une G -variété *Hamiltonienne réelle* est une variété symplectique réelle munie d'une G -action Hamiltonienne qui est $\mathbb{Z}/2$ -equivariant par rapport à une involution sur G . L'étude des G -variétés Hamiltoniennes dans le cas où G est un tore a été initiée par Duistermaat, qui a prolongé au cas réel plusieurs résultats fondamentaux de la géométrie symplectique, comme le théorème de convexité abélien due à Atiyah et à Guillemin-Sternberg.

La notion générale, qui emploie des espaces symétriques et des systèmes de racines restreints d'une manière intéressante, a été introduite par Sjamaar et O'Shea afin d'obtenir des versions réelles du théorème de convexité non-abelien de Kirwan et des inégalités de valeurs propres de Klyachko. Le quotient d'une G -variété Hamiltonienne réelle est une variété symplectique réelle (si non singulier). D'importants exemples G -variétés Hamiltoniennes sont les espaces de polygones, les divers types de variétés réelles et de variétés de drapeaux quaternioniques, et (dans des dimensions infinies) l'espace des connexions d'un fibré principal sur une surface de Riemann *non-orientable*.

Je discuterai les propriétés de convexité des G -variétés Hamiltoniennes et un travail en collaboration avec Tara Holm concernant leur propriétés cohomologiques.

Pol Vanhaecke (Université de Poitiers, France)

INTÉGRABILITE ALGÈBRIQUE

La plupart des systèmes intégrables classiques admettent une complexification naturelle, où les tores de Liouville deviennent des tores algébriques complexes (variétés abéliennes). Le fait d'introduire un temps complexe et des coordonnées complexes nous fait découvrir les structures algébriques et géométriques sous-jacentes et plusieurs constructions classiques (linéarisation, coordonnées action-angle, solutions explicites, symétries cachées, ...) deviennent réalisables, et pour des classes d'exemples même systématiques. A partir de la notion générale d'intégrabilité (au sens de Liouville) sur une variété de Poisson (réelle ou complexe) et après quelques mots sur les variétés abéliennes, j'introduirai les systèmes algébriquement intégrables, je vais illustrer leurs propriétés de base sur quelques exemples simples, puis je donnerai quelques outils qui permettent de découvrir, puis d'écrire, leur géométrie. Les préalables pour ce mini-cours sont les notions de base sur les variétés (réelles, complexes, algébriques) et une certaine familiarité avec des structures de Poisson sur des (telles) variétés.
