

Внешний бильярд

С. Л. Табачников

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ

Для игры во внешний бильярд нужен бильярдный стол — ограниченная выпуклая область на плоскости. Игра состоит в следующем. Начальная позиция бильярдного шара — это точка A вне бильярдного стола. Из точки A можно провести две касательные (точнее, опорные) прямые к границе бильярдного стола γ — левую l и правую r , если смотреть из точки A . Продолжим правую касательную за точку касания X до точки B так, что $BX = AX$ (см. рис. 1). Точка B и есть новое положение бильярдного шара. Обозначая внешнее бильярдное отображение через T (или, если нужно подчеркнуть зависимость от стола, через T_γ), имеем: $B = T(A)$.

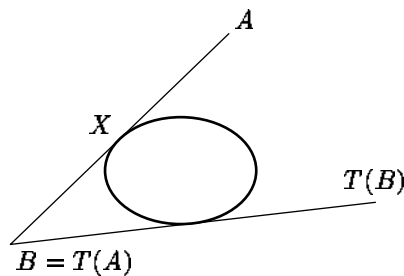


Рис. 1.

У данного определения есть один дефект: точка X может оказаться не единственной. Это произойдет, если граница бильярдного стола содержит отрезок прямой, например, если бильярдный стол — многоугольник. Этот недостаток определения неустраним и мы считаем, что отображение T не определено в тех точках, которые лежат на продолжениях отрезков, являющихся частью кривой γ . Это напоминает обычный (внутренний) бильярд: если бильярдный шар попадает в угол, его дальнейшее движение не определено.

Внешний бильярд изучен гораздо менее основательно, чем внутренний. Даже терминология не вполне устоялась: внешний бильярд известен также как «дуальный бильярд» и «антибильярд» (по-английски, «outer», «exterior», «dual» и «antibilliard»). Я не знаю, кто первым изобрел внешний бильярд. Знаменитый математик второй половины XX века Юрген Мозер описал внешний бильярд в оказавшей большое влияние книге [5]. Мозер узнал о внешнем бильярде из лекции австралийского математика Б. Ньюмана в конце 1950-х гг.

Рассмотрим несколько примеров.

ПРИМЕР 1. Если внешний бильярдный стол — круг, то каждая точка движется по концентрической окружности. Тем самым, каждая концентрическая окружность — инвариантная кривая внешнего бильярдного отображения T .

Отметим, что внешнее бильярдное отображение не чувствительно к аффинным преобразованиям плоскости. Точнее говоря, пусть f — аффинное преобразование, а γ — внешняя бильярдная кривая. Тогда

$$f \circ T_\gamma = T_{f(\gamma)} \circ f$$

(см. рис. 2).

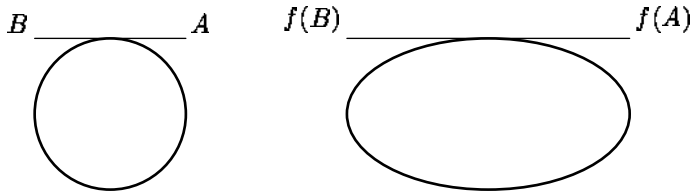


Рис. 2.

Поскольку эллипс — аффинный образ окружности, все, сказанное о круглом внешнем бильярдном столе, относится в равной мере и к эллиптическому.

ПРИМЕР 2. Если внешний бильярдный стол — квадрат, то движение каждой точки — периодическое. Структура орбит изображена на рис. 3: каждая точка квадрата, отмеченного номером n , посещает все остальные квадратики с этим номером (их $4n$) по одному разу, прежде чем вернуться в исходное положение. Читатель легко установит аналогичные факты о треугольном внешнем бильярдном столе и о столе в форме правильного шестиугольника. В силу аффинной инвариантности, сказанное о квадрате относится и к произвольному параллелограмму.

ПРИМЕР 3. Если внешний бильярдный стол — правильный пятиугольник, то наряду с периодическими орбитами, есть и бесконечные. Одна такая орбита

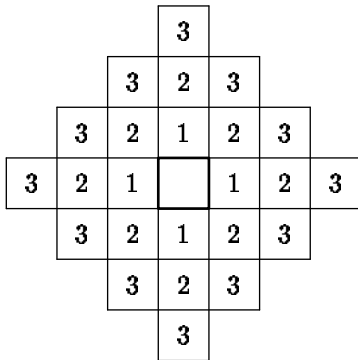


Рис. 3.

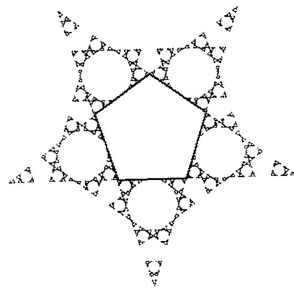


Рис. 4.

показана на рис. 4. Отметим бросающееся в глаза самоподобие изображенной орбиты (точнее, ее замыкания). Существование бесконечных орбит вовсе не очевидно, и доказательство (данное в [8] и [9]) опирается на отмеченное самоподобие. Оно же позволяет вычислить (дробную!) размерность множества бесконечных орбит, которая оказывается равной $\lg 6 / \lg(\sqrt{5} + 2) = 1.24\dots$

Компьютерные эксперименты показывают, что нечто подобное происходит и с другими правильными n -угольниками (за исключением $n = 3, 4, 6$ — см. предыдущий пример).

2. СОХРАНЕНИЕ ПЛОЩАДИ

Независимо от формы внешнего бильярдного стола, внешнее бильярдное отображение обладает свойством сохранять площадь. Докажем это.

Возьмем близкие точки X и X' на кривой γ . Выберем число $r > 0$ и проведем касательные отрезки длины r к γ в каждой точке между X и X' . Концы этих отрезков пробегает кривые AA' и BB' , и при этом $T(AA') = BB'$. Прделаем то же построение, заменяя r на $r - \varepsilon$ (предполагая конечно, что ε — бесконечно малое); мы получим кривую CC' и ее образ DD' . Обозначим через Y точку пересечения отрезков AB и $A'B'$ и через δ (еще одно бесконечно малое!) угол между этими отрезками (см. рис. 5).

Вычислим площадь криволинейного четырехугольника $ACC'A'$ с точностью до малых второго порядка, то есть, пренебрегая ε^2 и δ^2 . Имеем:

$$\text{Площадь } (AY A') = \frac{1}{2} \delta r^2, \quad \text{Площадь } (CY C') = \frac{1}{2} \delta (r - \varepsilon)^2 = \frac{1}{2} \delta r^2 - \delta \varepsilon r,$$

а значит

$$\text{Площадь } (ACC' A') = \delta \varepsilon r.$$

Аналогично,

$$\text{Площадь } (BDD' B') = \delta \varepsilon r,$$

то есть отображение T сохраняет площадь бесконечно малого четырехугольника $ACC'A'$. Это и доказывает свойство внешнего бильярдного отображения сохранять площадь.

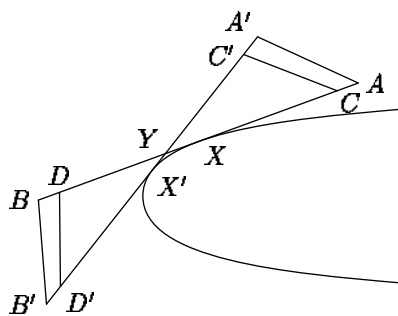


Рис. 5.

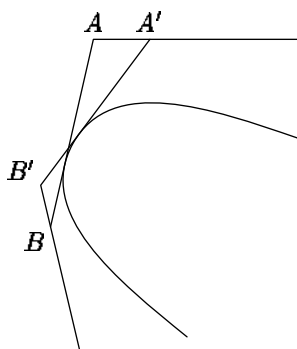


Рис. 6.

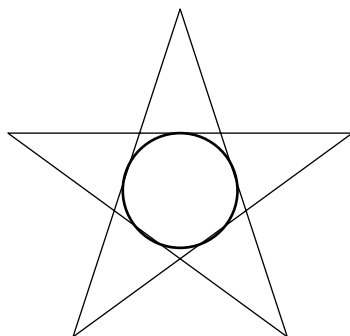


Рис. 7.

Сохранение площади имеет разнообразные следствия. Зададимся, например, таким вопросом. Предположим, что граница внешнего бильярдного стола γ — гладкая строго выпуклая кривая (т. е. ее кривизна всюду положительна). Пусть задано целое число $n \geq 3$. Существует ли у внешнего бильярдного отображения n -периодическая орбита?

Ответ на этот вопрос положительный, как показывает следующее рассуждение. Рассмотрим n -угольник наименьшей площади, описанный вокруг γ . Я утверждаю, что стороны этого многоугольника делятся пополам точками касания с кривой γ , то есть что это — n -периодическая орбита внешнего бильярдного отображения.

Действительно, если сторона AB не делится точкой касания пополам, то, слегка повернув отрезок AB в новое положение $A'B'$, можно уменьшить площадь многоугольника (см. рис. 6). Это рассуждение почти идентично предыдущему, доказывающему, что T сохраняет площадь.

Это же рассуждение доказывает, что у внешнего бильярдного отображения есть n -периодические орбиты, обходящие вокруг бильярдного стола k раз, где $1 \leq k \leq n/2$ (см. рис. 7, на котором $n = 5$, $k = 2$).

В действительности для каждого $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n/2$ найдется по крайней мере две периодические орбиты внешнего бильярдного отображения, но доказать это значительно сложнее. Аналогичный факт для внутреннего бильярда был доказан Биркгофом в 1920-х гг.

Рассмотрим еще одно следствие сохранения площади. Предположим, что у внешнего бильярдного отображения есть выпуклая инвариантная кривая Γ (говоря об инвариантной кривой, я всегда предполагаю, что Γ обходит вокруг бильярдного стола ровно один раз). Можно ли восстановить бильярдный стол по Γ ? Ответ дается следующей конструкцией.

Зафиксируем число $c > 0$ и рассмотрим семейство прямых, отсекающих от фигуры, ограниченной Γ , сегменты постоянной площади c . Полученное однопараметрическое семейство прямых имеет огибающую, т. е. такую кривую γ , которая касается прямых семейства в каждой своей точке (см. рис. 8).

Вообще говоря, кривая γ может не быть гладкой (этот вопрос подробно обсуждается в статье [10]), но мы предположим, что γ — гладкая кривая. Я утвер-

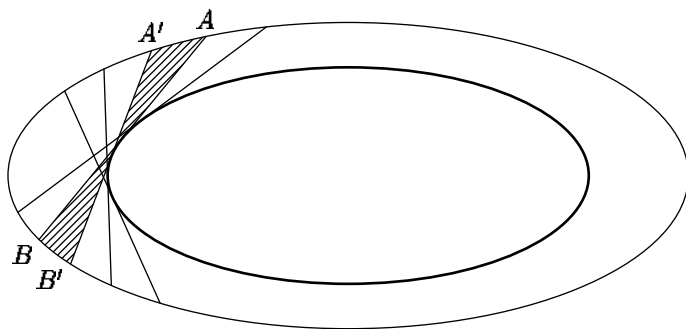


Рис. 8.

жду, что Γ — инвариантная кривая внешнего бильярдного отображения T_γ . Действительно, площади заштрихованных инфинитезимальных треугольников на рис. 8 равны, а это, как мы уже видели, означает, что отрезок AB делится точкой касания с кривой γ пополам.

Отметим, что описанная конструкция зависит от параметра s , поэтому кривая Γ задает целое однопараметрическое семейство бильярдных столов. Аналог этой конструкции для внутреннего бильярда хорошо известен (производится с помощью нерастяжимой нити) — см., например, [2].

Вернемся к примеру 1 из предыдущего параграфа. Если внешний бильярдный стол — круг, то каждая точка вне него лежит на инвариантной кривой; в этом случае говорят, что внешнее бильярдное отображение интегрируемо. Интегрируемость — очень редкое явление; она означает, что отображение весьма регулярно, т. е. поведение точки при итерациях отображения полностью предсказуемо. Существует гипотеза, что интегрируемость внешнего бильярдного отображения имеет место, только если внешний бильярдный стол — эллипс. По всей видимости, доказать это весьма трудно (я верю, что эта гипотеза верна); аналогичная гипотеза для внутреннего бильярда (приписываемая Биркгофу) тоже не доказана, несмотря на усилия многих математиков.

3. ДВОЙСТВЕННОСТЬ МЕЖДУ ВНЕШНИМ И ВНУТРЕННИМ БИЛЛИАРДАМИ

Читатель, вероятно, уже отметил своеобразную двойственность между внешним и внутренним бильярдами. Траектория внутреннего бильярда — вписанный многоугольник, а внешнего — описанный, причем первый имеет экстремальный периметр, а последний — экстремальную площадь (см. предыдущий параграф). Чем объяснить такую двойственность между длиной и площадью?

Ситуация прояснится, если рассмотреть бильярд не на плоскости, а на сфере. Роль прямых в сферической геометрии играют большие круги. Имеется замечательная двойственность между точками и ориентируемыми прямыми: полосу отвечает экватор (см. рис. 9), на котором точки названы большими буквами, а соответствующие прямые — строчными. Отметим, что (сферическое) расстояние AB равно углу между прямыми a и b .

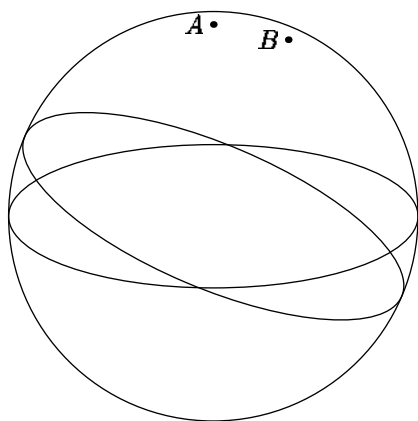


Рис. 9.

Важное свойство сферической двойственности состоит в следующем: если точка A лежит на прямой b , то двойственная точка B лежит на двойственной прямой a (докажите!).

Двойственность распространяется на сферические кривые. Гладкая ориентированная кривая γ определяет однопараметрическое семейство касательных прямых. Сопоставляя этим прямым двойственные точки, получаем однопараметрическое семейство точек, т. е. новую кривую γ^* . Это и есть кривая, двойственная кривой γ . Двойственную кривую γ^* можно построить так: каждую точку X исходной кривой γ нужно сдвинуть на расстояние $\pi/2$ (то есть на четверть большого круга) вдоль ориентированной нормали к γ в точке X ; ориентация нормали определяется ориентацией кривой γ по правилу правой руки. Например, если γ — параллель северной широты α , то, в зависимости от ориентации γ , кривая γ^* — параллель северной или южной широты $\pi/2 - \alpha$.

Отметим важное свойство двойственности: кривая, двойственная двойственной, центрально-симметрична исходной, т. е.

$$(\gamma^*)^* = -\gamma.$$

Читатель, не знакомый со сферической двойственностью, получит удовольствие от доказательства сформулированного свойства; подробное обсуждение геометрии сферических кривых содержится в статье [1].

Рассмотрим отражение бильярдного шара от бильярдной кривой γ в точке X (см. рис. 10, левая часть). Двойственная картина изображена на рис. 10 справа (как и раньше, двойственные объекты обозначены одинаковыми буквами).

Закон бильярдного отражения гласит: «угол падения равен углу отражения», т. е. углы, образованные прямыми a и b с касательной l , равны. На двойственной картине это означает, что $AL = LB$, а значит, двойственное бильярдное отображение относительно кривой γ^* переводит точку A в точку B . Итак, сферические внешний и внутренний бильярды двойственны друг другу.

А как объяснить двойственность между длиной и площадью? Траектория внутреннего бильярда — вписанный многоугольник экстремального периметра

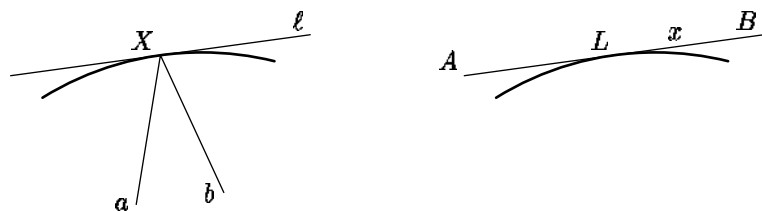


Рис. 10.

тра. Длины двойственны углам. Следовательно, траектория внешнего бильярда — описанный многоугольник, имеющий экстремальную сумму углов. Сумма углов сферического n -угольника связана с его площадью:

$$\sum \alpha_i = \pi(n - 2) + A$$

(конечно, полная площадь сферы равна 4π). Это — теорема Гаусса–Бонне для сферических многоугольников; см., например, [2].

Итак, орбита внешнего бильярдного отображения на сфере — это описанный многоугольник экстремальной площади. Плоскость можно представлять как сферу бесконечного радиуса. Сумма углов n -угольника перестает быть переменной (она равна $\pi(n - 2)$), однако площадь сохраняет роль функции на описанных многоугольниках, чьи экстремумы отвечают орбитам внешнего бильярда.

4. МОЖЕТ ЛИ ОРБИТА УЙТИ В БЕСКОНЕЧНОСТЬ?

Посмотрим на внешний бильярд «с высоты птичьего полета», т. е. зададимся вопросом: как устроены орбиты очень далеко от бильярдного стола? Если смотреть издали, то бильярдная кривая γ представляется точкой, а внешнее бильярдное отображение T — центральной симметрией. Эволюция точки под действием отображения T^2 выглядит как непрерывное движение вдоль центрально-симметричной замкнутой кривой Γ , причем это движение удовлетворяет второму закону Кеплера: секториальная скорость постоянна (т. е. в равные времена радиус-вектор заметает равные площади; единица времени — это, конечно, одна итерация отображения T^2). На рис. 11 изображены некоторые внешние бильярдные кривые γ (верхняя строка) и соответствующие инвариантные

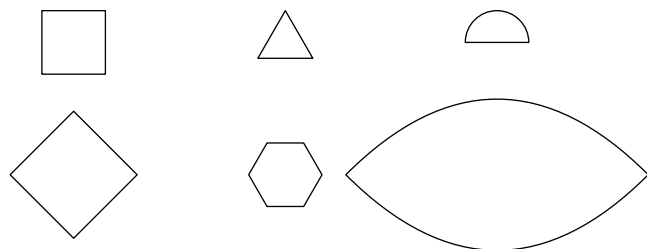


Рис. 11.

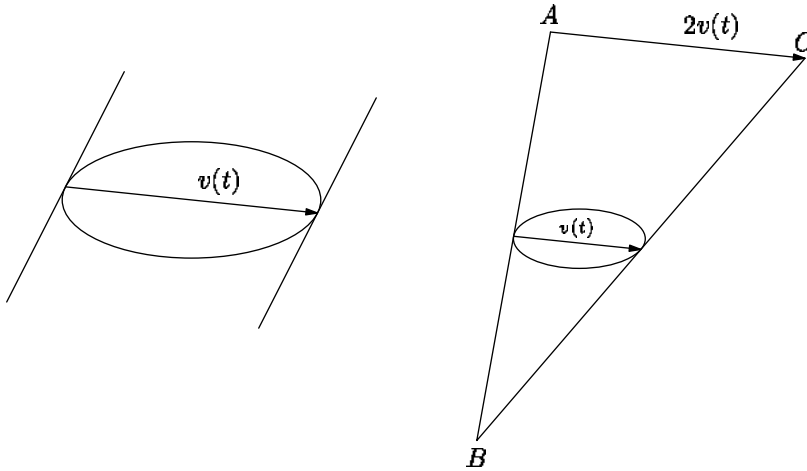


Рис. 12.

кривые в бесконечности Γ (последний столбец состоит из полукруга и из двух равных дуг парабол, пересекающихся под прямым углом).

Сейчас я объясню эти наблюдения. Для определенности, рассмотрим случай гладкой кривой γ (читателю предлагается самостоятельно изучить случай, когда γ — выпуклый многоугольник). Рассмотрим какую-нибудь параметризацию внешней билиардной кривой $\gamma(t)$ и обозначим через $v(t)$ вектор, конец которого — точка $\gamma(t)$, а начало — точка касания опорной прямой к γ , параллельной вектору $\gamma'(t)$ (см. левую часть рис. 12).

Для точек, очень удаленных от билиардного стола, угол ABC на правой части рис. 12 пренебрежимо мал, поэтому искомая инвариантная кривая в бесконечности $\Gamma(t)$ (определенная лишь с точностью до подобия) должна иметь касательный вектор, пропорциональный $v(t)$. Иными словами, мы хотим решить дифференциальное уравнение

$$\Gamma'(t) \sim v(t).$$

Ясно, что решение (если оно существует) единственно с точностью до гомотетии — ведь направление кривой Γ задано во всех ее точках вектором v .

Напомним, что векторное произведение $a \times b$ — это ориентированная площадь параллелограмма, образованного векторами a и b . В частности, $a \times b = 0$ тогда и только тогда, когда векторы a и b пропорциональны.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Решением дифференциального уравнения является следующая вектор-функция:

$$\Gamma(t) = \frac{v'(t)}{v(t) \times v'(t)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем:

$$\Gamma' = \frac{v''}{v \times v'} - \frac{v'(v \times v'')}{(v \times v')^2},$$

поэтому

$$v \times \Gamma' = \frac{v \times v''}{v \times v'} - \frac{(v \times v')(v \times v'')}{(v \times v')^2} = 0.$$

Следовательно, $\Gamma'(t) \sim v(t)$, что и требовалось.

Итак, у нас есть формула для кривой Γ . Остается объяснить закон Кеплера. Движение по кривой $\Gamma(t)$ происходит со скоростью $2v(t)$, а секториальная скорость равна

$$2v(t) \times \Gamma(t) = 2 \frac{v \times v'}{v \times v'} = 2,$$

то есть не зависит от времени (снова подчеркнем, что значение константы не имеет особого смысла, так как все определено лишь с точностью до подобия).

Мы видим, что динамика внешнего бильярдного отображения (а точнее, его второй итерации) в бесконечности хорошо аппроксимируется непрерывным движением вдоль кривых, гомотетичных Γ . Важно понимать, однако, что это — всего лишь приближение к гораздо более сложной динамике. Тем не менее, описанная аппроксимация имеет важные следствия.

Первое следствие относится к случаю, когда кривая γ достаточно гладкая (насколько я знаю, достаточно шестикратной дифференцируемости). В этом случае, используя теорию КАМ (Колмогоров – Арнольд – Мозер), можно доказать, что отображение T_γ действительно имеет инвариантные кривые сколь угодно далеко от бильярдного стола (см. [5, 6]). Такая инвариантная кривая служит «оградой», которую не может пересечь орбита внешнего бильярдного отображения. Следовательно, ни одна орбита отображения T_γ не может уйти в бесконечность.

Второе следствие относится к случаю, когда бильярдный стол — выпуклый многоугольник. В этом случае Γ — центрально-симметричный выпуклый k -угольник (определенный с точностью до гомотетии). Каждой стороне Γ отвечает «время» t — отношение длины стороны к скорости v , с которой происходит движение вдоль этой стороны (эта скорость — одна из диагоналей многоугольника γ ; см. предыдущее обсуждение). Набор чисел $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ определен с точностью до общего множителя. Внешний бильярдный стол называется *квазирациональным*, если все компоненты \bar{t} можно сделать рациональными (а тогда — и целыми).

Примером квазирационального многоугольника служит многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты. Другой пример — правильный многоугольник, для которого $\bar{t} = (1, \dots, 1)$.

В статье [6] Ю. Мозер поставил следующий вопрос: может ли орбита внешнего бильярда уйти в бесконечность, если внешний бильярдный стол — выпуклый многоугольник? Частичный ответ дается следующей теоремой.

ТЕОРЕМА. *Если внешний бильярдный стол — квазирациональный многоугольник, то ни одна орбита внешнего бильярдного отображения не может уйти в бесконечность.*

Доказательство этой теоремы не использует «тяжелой артиллерии» современной математики, но тем не менее, совсем не просто. Читатель может найти

детали в статьях [4, 7, 3]. Полный ответ на вопрос Мозера до сих пор не известен (компьютерные эксперименты дают основания думать, что если внешний бильярдный стол — полукруг, то некоторые орбиты уходят в бесконечность).

Отметим следствие сформулированной теоремы: если внешний бильярдный стол — многоугольник, все вершины которого имеют целые координаты, то все орбиты внешнего бильярдного отображения периодические.

Действительно, целочисленность вершин означает, что каждая орбита внешнего бильярдного отображения дискретна, а теорема означает, что орбита ограничена. Ограниченная и дискретная орбита конечна, что и требуется.

Насколько я знаю, более простого доказательства сформулированного следствия, не использующего вышеуказанной теоремы, не известно; было бы интересно найти такое доказательство.

Еще один открытый вопрос, тоже относящийся к случаю, когда внешний бильярдный стол — выпуклый многоугольник: может ли внешнее бильярдное отображение вообще не иметь периодических траекторий?

Отметим в заключение параграфа, что внешний бильярд имеет смысл и в геометрии Лобачевского, причем свойство сохранения площади остается в силе. Изучение таких бильярдных — интересная открытая задача.

5. МНОГОМЕРНЫЙ ВНЕШНИЙ БИЛЛИАРД

Внутренний бильярд определен в пространстве любой размерности, например, в обычном трехмерном пространстве. А как обстоит дело с внешним бильярдом?

Оказывается, внешний бильярд можно определить в любом четномерном пространстве (плоскость четномерна!). Вещественное пространство размерности $2n$ можно рассматривать как комплексное пространство размерности n . Нам понадобится операция умножения на $\sqrt{-1}$, которую мы обозначим через J — это линейное отображение пространства \mathbb{C}^n в себя. На плоскости J — это просто поворот на $\pi/2$ в положительном направлении, а в \mathbb{C}^n оператор J можно представлять себе как одновременный поворот каждого координатного пространства \mathbb{C} на $\pi/2$.

Внешний бильярдный стол — это так же, как и раньше, выпуклая ограниченная область. Обозначим ее границу — выпуклую замкнутую гиперповерхность в \mathbb{C}^n , через M . Внешнее бильярдное отображение можно было бы определить, если бы в каждой точке M была определена единственная касательная прямая. Проблема же в том, что таких прямых слишком много. Разрешается эта трудность так.

Обозначим через ν внешний единичный нормальный вектор к M (предполагая, что M — гладкая строго выпуклая гиперповерхность). Вектор $J(\nu)$ касается M и задает ориентированную касательную прямую в каждой точке M . Можно доказать, что через каждую точку A вне бильярдного стола проходит ровно две такие касательные прямые, причем одна из них, r , имеет направление к M , а другая, l , — от M . Теперь ясно, как определить внешнее бильярдное отображение: находим такую точку $X \in M$, что соответствующая прямая r проходит через A , и отражаем A в точке X , чтобы получить новую точку $B = T(A)$ (сравните с началом параграфа 1).

Что данное определение «правильное», показывает следующий аналог свойства сохранения площади. Наряду с обычным скалярным произведением, четномерное пространство обладает другой билинейной операцией — симплектической структурой. Симплектическая структура обобщает векторное произведение на плоскости, то есть ориентированную площадь параллелограмма. Обозначается симплектическая структура через ω и задается следующей формулой:

$$\omega(a, b) = J(a) \cdot b,$$

где a и b — векторы, а точкой обозначено скалярное произведение. В отличие от последнего, ω — кососимметричная операция:

$$\omega(a, b) = -\omega(b, a).$$

Так вот, для любого внешнего бильярдного стола, внешнее бильярдное отображение сохраняет симплектическую структуру. Эта теорема (доказанная в [8, 9]) имеет следствия, известные нам в случае плоскости. Например, у внешнего бильярдного отображения есть периодические траектории всех периодов, начиная с 3.

Тем не менее, о многомерном внешнем бильярде не известно почти ничего. Например, может ли орбита уходить в бесконечность? В многомерной ситуации теория КАМ больше не обеспечивает существования инвариантных гиперповерхностей. Другой интересный вопрос касается случая, когда внешний бильярдный стол — выпуклый многогранник (скажем, тетраэдр в четырехмерном пространстве). Этот вопрос тоже полностью открыт.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Арнольд В.* Геометрия сферических кривых и алгебра кватернионов // Успехи Матем. Наук, 1995. Т. 50, вып. 1. С. 3–68.
- [2] *Берже М.* Геометрия. М. Мир, 1984.
- [3] *Gutkin E., Simanyi N.* Dual polygonal billiards and necklace dynamics // Comm. Math. Phys., 1991. V. 143. P. 431–450.
- [4] *Kolodziej R.* The antibilliard outside a polygon // Bull. Pol. Acad. Sci., 1989. V. 37. P. 163–168.
- [5] *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems // Ann. of Math. Stud., 1973. V. 77.
- [6] *Moser J.* Is the solar system stable? // Math. Intell., 1978. V. 1. P. 65–71.
- [7] *Shaidenko A., Vivaldi F.* Global stability of a class of discontinuous dual billiards // Comm. Math. Phys., 1987. V. 110. P. 625–640.
- [8] *Табачников С.* Дуальные бильярды // Успехи Матем. Наук, 1993. Т. 48, вып. 6. С. 75–102.
- [9] *Tabachnikov S.* Billiards // SMF “Panoramas et Syntheses”, 1995. No 1.
- [10] *Табачников С., Фукс Д.* Сегменты постоянной площади // Квант, 1990. №8. С. 26–31.