THÉORÈME DE STRUCTURE POUR LES BIGÈBRES GÉNÉRALISÉES

JEAN-LOUIS LODAY

Note[1] de l'exposé intitulé "Beyond Hopf algebras"
fait à l'IHP (Paris) le 16 janvier 2007 dans le cadre du Colloque
"Higher structures in Geometry and physics"
en l'honneur de Jim Stasheff et Murray Gerstenhaber

Abstract. We announce a result on the structure of connected generalized bialgebras. It essentially claims that under some simple conditions, any connected generalized bialgebra is completely determined by its primitive part. It generalizes both the classical Poincaré-Birkhoff-Witt theorem and the Cartier-Milnor-Moore theorem, valid for cocommutative bialgebras. The proofs, together with variations and many examples, are to be found in "Generalized bialgebras and triples of operads" available on ArXiv.

Introduction

Le but de cette Note est d'exposer brièvement le résultat principal du papier "Generalized bialgebras and triples of operads", disponible sur ArXiv. Il s'agit d'un théorème de structure pour les bigèbres généralisées connexes. On y montre que, sous des hypothèses assez simples à vérifier en général, une bigèbre généralisée connexe est complètement déterminée par sa partie primitive. Dans le cas classique des bigèbres cocommutatives ce résultat est équivalent aux théorèmes de Cartier-Milnor-Moore et Poincaré-Birkhoff-Witt. La preuve, ainsi que de nombreux exemples et quelques variations, se trouvent dans loc.cit. [2].

1. Bigèbres généralisées

On utilise le langage des opérades algébriques. On se place sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. On se donne deux opérades $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ que l'on suppose connexes, c'est à dire: $\mathcal{A}(0) = 0, \mathcal{A}(1) = \mathbb{K}\,\mathrm{id}$ et idem pour $\mathcal{C}$. Pour toute $\mathcal{A}$-algèbre A tout élément $\mu \in \mathcal{A}(n)$ définit une opération n-aire:

$$\mathcal{A}(n) \otimes_{S_n} A^{\otimes n} \to A \ .$$

[1] This note is not supposed to be cited, cite instead the reference [2].

Pour toute $\mathcal{C}$-cogèbre C tout élément $\delta \in \mathcal{C}(n)$ définit une coopération n-aire de C dans $C^{\otimes n}$. L'application

$$\mathcal{C}(n) \otimes C \to C^{\otimes n}, \quad (\delta, x) \mapsto \delta(x)$$

est S_n-équivariante.

La *partie primitive* d'une cogèbre C est notée $\operatorname{Prim} C$ et est définie par:

$$\operatorname{Prim} C := \{x \in C \mid \delta(x) = 0 \text{ pour tout } \delta \in \mathcal{C}(n), n \geq 2\}.$$

On définit une filtration sur C de la façon suivante:

$$F_r C := \{x \in C \mid \delta(x) = 0 \text{ pour tout } \delta \in \mathcal{C}(n), n > r\}.$$

On remarque que $F_1 C = \operatorname{Prim} C$. Par définition une cogèbre C est dite *connexe* si $C = \bigcup_{r \geq 1} F_r C$.

Par définition une *bigèbre généralisée* est un espace vectoriel $\mathcal{H}$ qui est muni d'une structure de $\mathcal{C}$-cogèbre et d'une structure de $\mathcal{A}$-algèbre. De plus on suppose qu'il y a des relations de compatibilité, notées $\between$, entre les coopérations et les opérations. On parlera alors de $(\mathcal{C}^c, \between, \mathcal{A})$-bigèbres ou, plus brièvement, de $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$-bigèbres (ou simplement de bigèbres si le contexte est clair). L'exposant c est là pour indiquer quelle opérade détermine la structure de cogèbre (par déduction l'autre détermine la structure d'algèbre).

On fera l'hypothèse suivante, dite de *distributivité*, sur les relations de compatibilité:

(H0) *Pour toute coopération $\delta \in \mathcal{C}(m)$ et toute opération $\mu \in \mathcal{A}(n)$ il existe une relation de distributivité, c'est à dire du type:*

$$\delta \circ \mu = \sum_i (\mu_1^i \otimes \cdots \otimes \mu_m^i) \circ \omega \circ (\delta_1^i \otimes \cdots \otimes \delta_n^i) \qquad (\between)$$

où

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{A}(n),\ \mu_1^i \in \mathcal{A}(k_1), \ldots, \mu_m^i \in \mathcal{A}(k_m), \\ \delta \in \mathcal{C}(m),\ \delta_1^i \in \mathcal{C}(l_1), \ldots, \delta_n^i \in \mathcal{C}(l_n), \\ k_1 + \cdots + k_m = l_1 + \cdots + l_n = r, \\ \omega \in \mathbb{K}[S_r]. \end{cases}$$

On fait l'hypothèse suivante sur la $\mathcal{A}$-algèbre libre sur l'espace vectoriel V:

(H1) *L'algèbre libre $\mathcal{A}(V)$ est munie fonctoriellement d'une structure de $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$-bigèbre.*

Le premier résultat consiste à déterminer la structure algébrique de la partie primitive d'une bigèbre. On dit qu'une opération $\mu \in \mathcal{A}(n)$ est *primitive* si l'élément $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ est primitif dans $\mathcal{A}(V)$ pour $V = \mathbb{K}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}x_n$. On note $\operatorname{Prim}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}(n) \subset \mathcal{A}(n)$ l'espace des opérations primitives.

Theorem 1.1. $\operatorname{Prim}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ *est une sous-opérade de* $\mathcal{A}$. *Pour toute* $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$-*bigèbre* $\mathcal{H}$, *la partie primitive* $\operatorname{Prim} \mathcal{H}$ *est une* $\operatorname{Prim}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$-*algèbre.*

Que $\operatorname{Prim}_{\mathcal{C}} \mathcal{A}$ soit un sous-foncteur de $\mathcal{A}$ est une évidence. Ce qui l'est moins, c'est que la composition d'opérations primitives est encore primitive.

2. Algèbre enveloppante universelle

L'inclusion d'opérades $\mathcal{P} := \mathrm{Prim}_{\mathcal{C}}\mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{A}$ induit un foncteur d'oubli

$$F : \mathcal{A}\text{-alg} \to \mathcal{P}\text{-alg} .$$

Celui-ci admet un adjoint à gauche, noté

$$U : \mathcal{P}\text{-alg} \to \mathcal{A}\text{-alg} ,$$

qui s'explicite sous la forme suivante. Pour toute $\mathcal{P}$-algèbre L on a

$$U(L) = \mathcal{A}(L)/\sim$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est engendrée par:
pour tout $x_1, \ldots, x_n$ dans $L \subset \mathcal{A}(L)$ on a

$$\mu^{\mathcal{P}}(x_1, \ldots, x_n) \sim (\mu^{\mathcal{A}}; x_1, \ldots, x_n), \quad \mu^{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}(n),$$

avec $\mu^{\mathcal{P}} \mapsto \mu^{\mathcal{A}}$ via l'inclusion $\mathcal{P}(n) \subset \mathcal{A}(n)$.

3. Théorème de structure

Soit $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$ un type de bigèbres qui vérifie les hypothèses `(H0)`et `(H1)`exposées ci-dessus. Puisque $\mathcal{A}(V)$ est une bigèbre, la projection canonique proj : $\mathcal{A}(V) \to V$ induit un unique morphisme de cogèbres:

$$\varphi(V) : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{C}^c(V)$$

où $\mathcal{C}^c(V)$ désigne la cogèbre colibre (connexe) sur V.
On fait l'hypothèse supplémentaire suivante:

`(H2epi)`*l'homomorphisme naturel de cogèbres* $\varphi(V)$ *est surjectif et scindé.*

On est maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal.

Theorem 3.1 (Théorème de structure)**.** *Soit* $(\mathcal{C}^c, \between, \mathcal{A})$ *un type de bigèbres sur un corps* $\mathbb{K}$ *de caractéristique zéro. Supposons que les hypothèses* `(H0)`*,* `(H1)`*et* `(H2epi)`*soient vérifiées. Alors, pour toute bigèbre* $\mathcal{H}$*, les assertions suivantes sont équivalentes:*
(a) $\mathcal{H}$ *est connexe,*
(b) $\mathcal{H} \cong U(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$*,*
(c) $\mathcal{H}$ *est colibre, i.e.* $\mathcal{H} \cong \mathcal{C}^c(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$*.*

Notons qu'il est parfois possible de se passer de l'hypothèse: $\mathbb{K}$ est de caractéristique zéro, en particulier quand les opérades et les relations de compatibilité sont régulières.
Brève esquisse de preuve. Pour démontrer le théorème il nous faut des morphismes qui relient $\mathcal{H}$ à $U(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$ et à $\mathcal{C}^c(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$. L'inclusion $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H} \rightarrowtail \mathcal{H}$ permet de construire le morphisme $U(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}) \to \mathcal{H}$ par universalité de U. Le point principal de la preuve est la construction d'un idempotent $e_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, fonctoriel en $\mathcal{H}$, dont l'image est $\mathrm{Prim}\,\mathcal{H}$. Par universalité il donne un morphisme $\mathcal{H} \to \mathcal{C}^c(\mathrm{Prim}\,\mathcal{H})$.

On montre que le composé

$$U(\operatorname{Prim}\mathcal{H}) \to \mathcal{H} \to \mathcal{C}^c(\mathcal{H})$$

est un isomorphisme. □

Lorsque l'hypothèse plus forte :

(H2iso) *l'homomorphisme naturel de cogèbres $\varphi(V)$ est un isomorphisme,*

est vérifiée, alors on peut montrer que l'opérade primitive $\mathcal{P}$ est triviale, c'est à dire que $\mathcal{P}(V) = V$. On note $Vect$ cette opérade (au lieu de $\mathrm{Id}_{\mathtt{Vect}}$). Dans ce cas le foncteur F est le foncteur d'oubli dans les espaces vectoriels, et donc le foncteur U, adjoint à gauche, est le foncteur "algèbre libre". Le théorème de structure devient alors un théorème de rigidité:

Theorem 3.2 (Théorème de rigidité)**.** *Soit $(\mathcal{C}^c, \between, \mathcal{A})$ un type de bigèbres sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique zéro. Supposons que les hypothèses (H0), (H1) et (H2iso) soient vérifiées. Alors toute bigèbre connexe $\mathcal{H}$ est à la fois libre et colibre:*

$$\mathcal{A}(V) \cong \mathcal{H} \cong \mathcal{C}^c(\operatorname{Prim}\mathcal{H}).$$

Terminologie. Lorsqu'un type de bigèbres $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$ vérifie (H0) et (H1) on dit que $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ (où $\mathcal{P} := \operatorname{Prim}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}$) est un triple d'opérades. Lorsqu'en plus il vérifie (H2epi) on dit qu'on a affaire à un *bon* triple. Il faut se rappeler que la notation $\mathcal{C}^c$-$\mathcal{A}$ sous-entend les relations de compatibilité $\between$.

Le résultat ci-dessous est très utile pour construire des bons triples à partir d'un bon triple donné.

Proposition 3.3. *Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un bon triple d'opérades et soit $r \in \mathcal{P}(n)$, $(n \geq 2)$, une opération primitive. Alors il existe un bon triple d'opérades*

$$(\mathcal{C}, \mathcal{A}/(r), \operatorname{Prim}_{\mathcal{C}}\mathcal{A}/(r)),$$

où (r) est l'idéal opéradique de $\mathcal{A}$, engendré par r. En conséquence il y a aussi un bon triple

$$(\mathcal{C}, \mathcal{A}/(\bar{\mathcal{P}}), Vect).$$

4. Examples

4.1. **Le cas classique** [1, 4, 5]**.** On note As, Com et Lie l'opérade des algèbres associatives, commutatives, de Lie respectivement. Une bigèbre cocommutative (classique) est une Com^c-As-bigèbre où la relation $\between$ est la relation de compatibilité de Hopf. Avec les notations standards:

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y)$$

pour le cas avec unité et co-unité.

Il est facile de vérifier que l'on a $\operatorname{Prim}_{Com}As = Lie$ et que

$$(Com, As, Lie)$$

est un bon triple. Le théorème de structure s'identifie au théorème de Cartier-Milnor-Moore pour (a) $\Longrightarrow$ (b) et au théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pour (b) $\Longrightarrow$ (c). On peut montrer que, dans ce cas, l'idempotent universel est l'idempotent eulérien.

Si l'on fait le quotient par Lie on trouve le bon triple $(Com, Com, Vect)$. Le théorème de rigidité est alors le théorème classique de Hopf-Borel:

sur un corps de caractéristique zéro, toute bigèbre cocommutative, commutative et connexe est libre (et colibre).

4.2. **Bigèbres unitaires infinitésimales.** L'algèbre tensorielle (sans unité) sur l'espace vectoriel V est

$$\bar{T}(V) = V \oplus \cdots \oplus V^{\otimes n} \oplus \cdots$$

avec comme produit la concaténation. Munissons la du coproduit "déconcaténation" donné explicitement par

$$\delta(v_1 \ldots v_n) := \sum_{i=1}^{n-1} v_1 \ldots v_i \otimes v_{i+1} \ldots v_n \ .$$

La relation de compatibilité de Hopf n'est pas vérifiée. Par contre, est vérifiée la relation *unitaire infinitésimale* $\between_{ui}$:

$$\delta(xy) = x \otimes y + x_{(1)} \otimes x_{(2)}y + xy_{(1)} \otimes y_{(2)},$$

où le coproduit est noté $\delta(x) =: x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Il est naturel de se poser la question de savoir s'il existe d'autres types de *bigèbres unitaires infinitésimales*, c'est à dire des $(As^c, \between_{ui}, As)$-bigèbres.

On peut montrer, cf. [3], que $(As, As, Vect)$ est un bon triple d'opérades et que, par conséquent, on a un théorème de rigidité dans ce cadre. Explicitement il dit que toute bigèbre unitaire infinitésimale connexe est une algèbre tensorielle sur la partie primitive avec comme coproduit la déconcaténation.

4.3. **Un nouveau cas.** Par définition une *algèbre dupliciale* sur le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel A muni de deux produits (opérations binaires associatives) $x \prec y$ et $x \succ y$ vérifiant de plus

$$(x \succ y) \prec z = x \succ (y \prec z) \ .$$

Par définition une *bigèbre dupliciale* est une algèbre dupliciale A munie d'un coproduit (coopération coassociative) $\delta(x) =: x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ vérifiant les relations de compatibilité $\between_{ui}$:

$$\delta(x \prec y) = x \otimes y + x_{(1)} \otimes x_{(2)} \prec y + x \prec y_{(1)} \otimes y_{(2)},$$

$$\delta(x \succ y) = x \otimes y + x_{(1)} \otimes x_{(2)} \succ y + x \succ y_{(1)} \otimes y_{(2)}.$$

Notons Mag l'opérade des algèbres *magmatiques*, c'est à dire les espaces munis d'une opération binaire (sans relation).

Theorem 4.4. *Il existe un bon triple d'opérades*

$$(As, Dup, Mag).$$

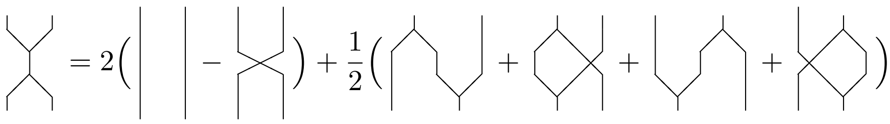
L'inclusion d'opérades $Mag \rightarrowtail Dup$ est donnée par

$$x \cdot y = x \prec y - x \succ y.$$

C'est l'analogue de $[x, y] = xy - yx$ du cas classique.

Si l'on applique la proposition 3.3 on trouve le bon triple $(As, As, Vect)$ évoqué ci-dessus.

4.5. *Lie^c-Lie*-**bigèbres.** On définit une notion de Lie^c-Lie-bigèbre, différente de la notion de bigèbre de Lie, en prenant pour relation de compatibilité $\between_{Lily}$:



Ici  est le crochet de Lie et  est le cocrochet de Lie.

Theorem 4.6. *Pour* $\between = \between_{Lily}$ *on a un bon triple d'opérades*

$$(Lie, Lie, Vect) .$$

On obtient ainsi un critère pour démontrer qu'une algèbre de Lie est libre: il suffit de construire un crochet de Lie qui en fait une $(Lie^c, \between_{Lily}, Lie)$-bigèbre connexe.

Les démonstrations de ces théorèmes ainsi que de nombreux exemples et plusieurs variations sont consultables dans [2]. On y trouvera par exemple le triple $(As, Dend, Brace)$ de M. Ronco, où la structure d'algèbre est dendriforme et la structure primitive est "brace", due à Gerstenhaber.

References

[1] *P. Cartier*, Hyperalgèbres et groupes de Lie formels, Séminaire Sophus Lie, 2e année: 1955/56. Faculté des Sciences de Paris.

[2] *J.-L. Loday*, Generalized bialgebras and triples of operads, preprint (2006), 110 p., ArXiv:math.QA/0611885.

[3] *J.-L. Loday; M. Ronco*, On the structure of cofree Hopf algebras, J. reine angew. Math. 592 (2006) 123–155.

[4] *J.W. Milnor; J.C. Moore*, On the structure of Hopf algebras, Ann. of Math. (2) 81 (1965), 211–264.

[5] *D. Quillen*, Rational homotopy theory, Ann. of Math. (2) 90 (1969), 205–295.

Institut de Recherche Mathématique Avancée, CNRS et Université Louis Pasteur, 7 rue R. Descartes, 67084 Strasbourg, France

E-mail address: `loday@math.u-strasbg.fr`